Prof. Dr. Alfred Toth

Kategorien als Gruppen

1. In Toth (2017) hatten wir zwischen Nachbarschaft und Umgebung unterschieden. Während für die Nachbarschaft (N) eines Elementes x gilt

$x \in N(x)$,

gilt für seine Umgebung (U)

$x \notin U(x)$,

d.h. ein Element x kann zwar sein eigener Nachbar, nicht aber seine eigene Umgebung sein. Ferner ist natürlich jede Nachbarschaft eine Umgebung, aber die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, vgl.

$N(1) = (1, 2)$ $\quad U(1) = 2$

$N(2) = (2, 3)$ $\quad U(2) = (1, 2, 3)$

$N(3) = (3, 4)$ $\quad U(3) = (2, 3, 4)$

... $\quad$ ...

$N(n\text{-}1) = ((n\text{-}1), n)$ $\quad U(n\text{-}1) = ((n\text{-}2), (n\text{-}1), n)$.

2. Im folgenden bilden wir eine ontische Relation mit U und N:

$S^* = (S, U, N)$

zusammen mit ihrer Komposition

$S \quad \rightarrow \quad U \quad \circ \quad S \quad \rightarrow \quad N$

z.B.

Schnitzel → Zitronenscheibe → Schnitzel → Pommes

Ontisches Modell:

Mit Austausch (S ↔ N):

S → U ∘ S → N

Pommes → Zitronenscheibe → Pommes → Schnitzel

Ontisches Modell:

Mit Austausch (S ↔ U):

S → U ∘ S → N

Zitronenscheibe → Schnitzel → Zitronenscheibe → Pommes

Ontisches Modell[1]:

Wir haben also eine algebraische Struktur (S*, ∘). Für sie gilt (vgl. Toth 2009, 2025):

Abgeschlossenheit: S ∘ S = N; S ∘ U = U ∘ S = S; S ∘ N = N ∘ S = U; U ∘ U = U; U ∘ N = N ∘ U = N; N ∘ N = S.

Assoziativität: S ∘ (U ∘ N) = (S ∘ U) ∘ N = U; U ∘ (N ∘ U) = (U ∘ N) ∘ U = N, N ∘ (N ∘ S) = (N ∘ N) ∘ S = N, usw.

Einselement: S ∘ U = U ∘ S = S; U ∘ U = U; N ∘ U = U ∘ N = N, d.h. e = U.

[1] Hier sind die Pommes durch (stilechten) Kartoffelsalat substituiert.

Inverses Element: $S^{-S} = N$, denn $S \circ N = U$; $U^{-S} = U = \text{const.}$, $N^{-S} = S$, denn $N \circ S = U$.

Die Menge $S^* = (S, U, N)$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$ bildet also eine Gruppe, und wir können die folgende Gruppentafel aufstellen

$\circ$	S	U	N
S	N	S	U
U	S	U	N
N	U	N	S .

Literatur

Toth, Alfred, Gruppentheoretische Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Nachbarschafts- und Umgebungsrelationen bei Menus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics 2017

Toth, Alfred, Einselemente in ontischen Gruppen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2025

6.4.2025